06.02.2016

Klausur
Nichteuklidische Geometrie, WS 2015-2016 (Weiss)

1. Metrische Räume.

(a) Geben Sie die Definition von *metrischer Raum.* [3]

(b) Sei $d^\diamond$ die Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$d^\diamond(x,y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$$

für $x, y \in \mathbb{R}^2$. Machen Sie eine Zeichnung der Teilmenge S von $\mathbb{R}^2$ bestehend aus allen Elementen, die Abstand 1 von $x = (0,0)$ haben. Zeigen Sie: es gibt mehr als eine abstandserhaltende Abbildung f vom Intervall $[0,2]$ mit der Standardmetrik nach $(\mathbb{R}^2, d^\diamond)$, die $f(0) = (0,0)$ und $f(2) = (1,1)$ erfüllt. [8]

(c) Sei $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik versehen, $d(a,b) = |b-a|$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine abstandserhaltende Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Form $f(x) = x + c$ oder die Form $f(x) = -x + c$ haben muss, mit festem $c \in \mathbb{R}$. (*Hinweis*: jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eindeutig festgelegt durch seine Abstände zu 0 und 1.) [8]

(d) Zeigen Sie: Es gibt keine abstandserhaltende Abbildung vom Intervall $[0,1]$ mit Standardmetrik nach Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit euklidischer Metrik. [4]

(e) Sei d^* die SNCF-Metrik auf $\mathbb{R}$, also $d^*(a,b) = |a| + |b|$ falls $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq b$. Zeigen Sie: wenn eine Folge $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ in $(\mathbb{R}, d^*)$ gegen $A \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist entweder $A = 0$ oder es existiert eine natürliche Zahl m derart, dass $a_n = A$ für alle $n \geq m$.

Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $f\colon \mathbb{R} \to X$ irgendeine Abbildung. Die Abbildung f möge *stetig im Punkt* 0 sein als Abbildung von $(\mathbb{R}, d^*)$ nach (X,d). Beweisen Sie, dass f dann *stetig* ist als Abbildung von $(\mathbb{R}, d^*)$ nach (X,d). [10]

2. Axiome I,II,III und erste Konsequenzen

(a) Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Welche Bedingung muss eine Teilmenge von X erfüllen, damit sie eine *Gerade* genannt werden darf? [2]

(b) Axiom I formulieren. (Gemeint ist eine Bedingung an einen metrischen Raum (X, d_X) ... Teil der Euklidischen Axiome, neu organisiert.) Zeigen: wenn ein metrischer Raum (X, d_X) das Axiom I erfüllt, dann gilt die strikte Dreiecksungleichung: nämlich $d(a,c) < d(a,b) + d(b,c)$ falls $a, b, c \in X$ nicht zu einer Geraden gehören. [13]

(c) Axiom II formulieren. Zeigen: wenn ein metrischer Raum X die Axiome I und II erfüllt, dann gibt es für jede Gerade k in X und jeden Punkt $B \in X \smallsetminus k$

einen Punkt in k, der unter allen Punkten von k den geringsten Abstand von B hat. (Bezeichnung: B^k, senkrechte Projektion von B auf k.) — *Hinweis*: Aufgabenteil (b) kann hier gut benutzt werden. Vorsicht: nicht so tun, als ob B^k schon irgendwie definiert ist, sondern erklären, wie es gefunden oder konstruiert wird. [10]

(d) In einem metrischen Raum X, der die Axiome I und II erfüllt, sei eine Gerade k gegeben und zwei verschiedene Punkte A, B in k. Zeigen: es gibt eine Isometrie $\tau\colon X \to X$ mit den Eigenschaften $\tau(A) = B$ und $\tau(k) = k$. Es gibt sogar mehrere davon. Wieviele gibt es genau? (*Mehr Erklärungen, mehr Punkte.*) [8]

3. Weitere Konsequenzen aus Axiomen I, II und III

Der metrische Raum X soll die Axiome I und II erfüllen.

Benutzt werden dürfen ohne Beweis: die Saccheri-Ungleichung, gewisse Eindeutigkeitseigenschaften von Senkrechten allgemein und gewisse praktische Beschreibungen von gewissen Senkrechten. Bei Benutzung sollen diese Aussagen aber sorgfältig formuliert werden.

In Aufgabenteil (d) darf benutzt werden: zu einer gegebenen orientierten Geraden k und $A \in k$ und Winkel α gibt es höchstens zwei orientierte Geraden durch A, die diesen Winkel α mit k machen. Eine Erklärung dieses Prinzips ist trotzdem erwünscht (mit den nötigen Definitionen zum Wort *Winkel*).

(a) Gegeben zwei Geraden k und h in X, nicht parallel zueinander. Was ist gemeint mit $h \perp k$, in Worten, h ist senkrecht zu k ? [2]

(b) Zeigen Sie: wenn zwei Geraden h, k eine gemeinsame Senkrechte n haben, also $h \perp n$ und $k \perp n$, dann sind sie parallel, also $h \| k$. [5]

(c) Kurz erklären, was eine Punktspiegelung ist. Zeigen: wenn eine Gerade aus einer anderen durch Punktspiegelung hervorgeht, dann sind die beiden parallel. [5]

(d) Zeigen: Wenn zwei orientierte Geraden eine dritte orientierte Gerade k im selben Winkel schneiden (Winkel gemessen auf derselben Seite von k), dann sind sie parallel. [5]

(e) Zeigen: Axiom III gilt genau dann für X, wenn *parallel* eine Äquivalenzrelation ist (auf der Menge der Geraden in X). [4]

(f) Gegeben Geraden k und h in X. Sei $p_k\colon X \to k$ die senkrechte Projektion auf k. Zeigen: diese Abbildung p_k ist stetig. (Dabei wird k mit der Unterraum-Metrik ausgestattet.) Zeigen: die Einschrankung der Abbildung p_k auf eine (andere) Gerade h ist eine Abbildung $h \to k$, die entweder konstant oder injektiv ist. [4]

(g) Gegeben drei Punkte A, B, C in X, die nicht auf einer Geraden liegen. Jedes der drei Segmente $[A, B]$, $[B, C]$, $[A, C]$ hat eine *Mittelsenkrechte*. Erklären Sie kurz, was damit gemeint ist. Zeigen Sie: wenn zwei von diesen Mittelsenkrechten sich in einem Punkt P treffen, dann treffen sich alle drei in diesem Punkt P. [8]

4. Gruppen und Wirkungen

(a) Definition von *Gruppe* und *Homomorphismus* geben. Beispiel einer Gruppe geben, die nicht kommutativ ist. [5]

(b) Sei G eine Gruppe (mit neutralem Element 1) und $x, y, z \in G$. Zeigen: wenn $xy = xz$, dann $y = z$. Daraus schliessen: zu jedem $x \in G$ gibt es genau ein $y \in G$ mit $xy = 1$. [3]

(c) Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$. Zeigen, dass $xy = yx$ genau dann gilt, wenn $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$. [4]

(d) Definition von *Wirkung einer Gruppe* G *auf einer Menge* S geben. Definition von *Bahn* einer Wirkung. Definition von *transitive* Wirkung. [3]

(e) Die Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ besteht aus allen 2×2-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante 1. (Die Gruppenstruktur ist durch Matrixmultiplikation gegeben.) Diese Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ wirkt auf der Menge $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ durch

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z := \frac{az + b}{cz + d}$$

für $z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. (Fehlende Einzelheiten bitte ausfüllen.) Man zeige, dass diese Wirkung transitiv ist. (*Überflüssiger Hinweis*: Schauen Sie sich die Bahn von einem *gewissen* Element von $\mathbb{Q} \cup \infty$ an.) [9]

(f) Gegeben sei eine Wirkung von G auf S; die Gruppe G hat 35 Elemente und die Menge S hat 13 Elemente. Zeigen Sie, dass mindestens ein $x \in S$ existiert mit der Eigenschaft $g \cdot x = x$ für alle $g \in G$. (*Hinweis*: S ist die disjunkte Vereinigung der Bahnen.) [9]

5. Beispiele $\mathbb{E}$ und $\mathbb{H}$

(a) Sei d die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Elemente von $\mathbb{R}^2$ werden hier als Spaltenvektoren $u, v, w, x, y, \ldots$ mit zwei reellen Einträgen beschrieben. Für jede orthogonale[1] 2×2-Matrix A mit reellen Einträgen und jedes $v \in \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung

$$\psi_{A,v} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; ; \; \psi_{A,v}(u) = Au + v$$

eine Isometrie. Alle Isometrien von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ haben diese Form. (Nicht beweisen.) Daher folgende Fragen.

[1] Dieses Adjektiv fehlte leider in der Version vom 6.2.2016. Eine $n \times n$-Matrix mit reellen Einträgen heisst *orthogonal*, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden.

- Eine Zusammensetzung $\psi_{A,v} \circ \psi_{B,w}$ hat die Form $\psi_{C,y}$. Welche Matrix C, welcher Vektor y ? (Antwort durch A, v, B, w ausdrücken. Keine Begründung gefordert.)
- Das Inverse von $\psi_{A,v}$ hat die Form $\psi_{B,w}$. Welche Matrix B, welcher Vektor w ? (Antwort durch A, v ausdrücken. Keine Begründung gefordert.)

[7]

(b) Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ und $\Phi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(z) = (\text{Im } (z))^{-1}$. Für eine 2×2-Matrix

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mit reellen Einträgen a, b, c, d und Determinante 1 ist $f_M\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ durch $f(z) = (az+b)/(cz+d)$ provisorisch definiert. Zeigen Sie, dass tatsächlich immer $cz + d \neq 0$ für $z \in \mathbb{H}$ und dass

$$\text{Im } (f_M(z)) = \frac{\text{Im } z}{|cz+d|^2} > 0\,,$$

so dass die Definition von f_M gerechtfertigt ist. Ausserdem sollen Sie die Formel

$$f'_M(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

herleiten und kurz erklären, wie sie zu verstehen ist. (Erklärungsbedarf besteht, weil hier mit komplexen Zahlen gearbeitet wird.) Mit der Formel für $\text{Im } (f_M(z))$ und der Formel für $f'_M(z)$ ergibt sich, dass

$$L^\Phi(\gamma) = L^\Phi(f_M \circ \gamma)$$

(Gleichheit von gewichteten Kurvenlängen), falls $\gamma\colon [s,t] \to \mathbb{H}$ eine stückweise glatte Kurve ist. Wie geht das? Fall einer glatten Kurve γ genügt hier. [16]

(c) Sei U eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$. Eine glatte Funktion (Kostenfunktion) $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) > 0$ für alle $x \in U$ bestimmt eine Metrik d^Φ auf U. Die Definition von $d^\Phi(x,y)$ benutzt glatte oder stückweise glatte Kurven γ in U von x nach y und ihre gewichtete Kurvenlänge $L^\Phi(\gamma)$; machen Sie das präzise.
Jetzt sei $U = \mathbb{R}^2$ und die Funktion Φ möge die Form $\Phi(x) = f(x_2)$ haben (also $\Phi(x)$ hängt nur von der zweiten Koordinate x_2 ab). Beweisen Sie, dass dann für $x, y \in U$ mit $y_2 \geq x_2$ gilt:

$$d^\Phi(x,y) \geq \int_{x_2}^{y_2} f(t)\ dt\ ;$$

und dass Gleichheit stattfindet, wenn $x_1 = y_1$. [10]